I.E.S. GONZALO NAZARENO

GLOBAL ÁLGEBRA MATEMÁTICAS 2ºBACHILLERATO

Marzo 02

1.- Discute, según los valores del parámetro **a** el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 3 \\ -x + 3y = a \\ 3x - 7y = 3a + 1 \end{array}\right\}$$

2.- Discute y resuelve, según los valores de m, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = m \\ x + (1+m)y + z = 2m \\ x + y + (1+m)z = 0 \end{array}\right\}$$

3.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula: $(I - A)(I + A)^{-1}$ (I es la matriz identidad de orden 3)

4.- La suma de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las unidades es igual a la suma de las cifras de las decenas y centenas. Si al número se le suma 270, resultan invertidas las cifras de las decenas y las centenas. Halla el número.

5- Enuncia tres propiedades de los determinantes.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcula:

a) $\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada ejercicio.

SOLUCIONES:

1) $\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 3 \\ -x + 3y = a \\ 3x - 7y = 3a + 1 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & a \\ 3 & -7 & 3a+1 \end{pmatrix}$ r(A)=2, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

veamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & a \\ 3 & -7 & 3a+1 \end{vmatrix} = 2a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$ de donde, tendremos que:

Para $a = \frac{5}{2} \Rightarrow$ r(A)= 2 = r(A')= nº incógnitas, SIST.COMPATIBLE DETERMINADO

Queda el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 3 \\ -x + 3y = \frac{5}{2} \end{array}\right\}$, resolviéndolo tenemos que $x = \frac{43}{2}$; $y = 8$

2) $\left.\begin{array}{l} x + \quad y + \quad z = m \\ x + (1+m)y + z = 2m \\ x + y + (1+m)z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1+m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{pmatrix}$

empezaremos viendo el rango de A (en principio, puede ser 1, 2 o 3):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{vmatrix} = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

Para m = 0: r(A)= 1 = r(A') SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Para resolverlo, como el rango es 1, nos quedamos con una ecuación (cualquiera, las tres son iguales): x +y +z = 0, y haciendo $y = \lambda, \quad z = \mu$, tenemos que la solución es en este caso: $x = -\lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu$

Para $m \neq 0$: r(A)= 3 = r(A') SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Lo resolvemos por Cramer, y las soluciones son: x = m, y = 1, z = -1

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, las matrices son $I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Inversa de I+A: $|I + A| = 1$, hallamos los adjuntos:

$(I+A)_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $(I+A)_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $(I+A)_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$(I+A)_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $(I+A)_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $(I+A)_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$(I+A)_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $(I+A)_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $(I+A)_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

De donde, tendremos que $(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, y ahora multiplicamos

$$(I-A)(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

4) Número: x centenas, y decenas, z unidades

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=14\\ x=y+z\\ 100x+10y+z+270=100y+10x+z\end{array}\right\}\text{operando y simplificando: } \left.\begin{array}{l} x+y+z=14\\ x-y-z=0\\ x-y\quad=-3\end{array}\right\}$$

y resolviendo por Cramer (o por Gauss), tenemos que x =2, y =5, z =7
por lo que el número era 257

5)a)

$$\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e\\ -d & -f & -e\\ g & i & h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c & b\\ -d & -f & -e\\ g & i & h\end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} 3d & 3f & 3e\\ -d & -f & -e\\ g & i & h\end{vmatrix}}_{F_2=-3F_1}=-\begin{vmatrix} a & c & b\\ d & f & e\\ g & i & h\end{vmatrix}\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}=$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & i & h\end{vmatrix}=1$$

b) $$\begin{vmatrix} f & e & d\\ c & b & a\\ i & h & g\end{vmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}=-\begin{vmatrix} c & b & a\\ f & e & d\\ i & h & g\end{vmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_e}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=1$$

c)

$$\begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i\\ d+2g & e+2h & f+2i\\ 2g & 2h & 2i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d+2g & e+2h & f+2i\\ 2g & 2h & 2i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -g & -h & -i\\ d+2g & e+2h & f+2i\\ 2g & 2h & 2i\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ 2g & 2h & 2i\end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c\\ 2g & 2h & 2i\\ 2g & 2h & 2i\end{vmatrix}}_{\text{dos filas iguales}}=2\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=2 \qquad F_3=-2F_1$$